Institut National Polytechnique de Lorraine
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE - NANCY

EPREUVE DE MATHEMATIQUES - SESSION 1996

Durée : 4 heures - Coefficient 5

On pourra admettre le résultat de certaines questions, en le signalant. La qualité de la rédaction, et le soin, seront notés.

1 Etant donnés deux nombres réels α et A avec $A > 0$, on dit d'une fonction f continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs complexes, qu'elle vérifie la condition $\mathscr{E}(\alpha,A)$ si :

pour tout $t \geq 0$, on a $|f(t)| \leq A.e^{\alpha t}$.

a) pour une telle fonction, déterminer les valeurs du paramètre complexe p pour lesquelles l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}.f(t)dt$$

est absolument convergente.
On note alors $F(p)$ la valeur de cette intégrale, et par
$L : f \to F$ la correspondance ainsi établie.
b) Dans quel sens peut-on dire que L est linéaire ?

2 Calculer $L(f)$ pour les fonctions suivantes :
a) $f(t) = 1, t \geq 0$
b) $f(t) = \cos(\omega t), t \geq 0$ avec ω paramètre réel
c) $f(t) = e^{\lambda t}, t \geq 0$ avec λ paramètre complexe

en précisant dans chaque cas le domaine de validité du calcul.

3 On suppose que f est continuement dérivable sur $[0,+\infty[$ et que la dérivée f' satisfait à la condition $\mathscr{E}(\alpha,A)$ énoncée en **1**

a) Montrer que f satisfait à une condition analogue (on sera amené à distinguer plusieurs cas selon les valeurs de α)

b) Etablir la relation
$L(f')(p) = p.L(f)(p)-f(0)$
en précisant son domaine de validité.

4 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$f_n(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{t^n}{n!} \text{ pour } t \geq 0.$$

a) Etablir une relation entre f_{n+1}, f'_{n+1} et f_n.
b) En déduire l'expression de $L(f_n)$.

5 Etant données deux fonctions f et g continues sur $[0,+\infty[$, on pose, pour tout $t \geq 0$

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

a) Montrer que si f satisfait la condition $\mathscr{E}_{A,\alpha}$ et g la condition $\mathscr{E}_{B,\beta}$ alors $f*g$ satisfait une condition analogue $\mathscr{E}_{C,\gamma}$, où l'on précisera les valeurs de C et de γ en fonction de celles de A, B, α et β.

b) Si f et g représentent les densités de probabilité de deux variables aléatoires X et Y positives (c'est-à-dire si f,g sont positives, avec : $\int_0^{\infty} f(t)dt = \int_0^{\infty} g(t)dt = 1$), et indépendantes, rappeler pourquoi $f*g$ est la densité de la variable aléatoire $S = X+Y$.

On admettra que $L(f*g) = L(f).L(g)$ sur le domaine de définition commun à $L(f)$ et $L(g)$.

6 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires (: définies sur l'espace de probabilité $(\Omega,A,\mathbb{P})$), indépendantes, et de même loi exponentielle de moyenne x positive.

a) Quelle est la loi de X_1+X_2 ?

b) Quelle est la loi de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$, pour $n \geq 1$?

7 a) Dans quel sens peut-on affirmer que $(\bar{X}_n)$ tend vers x lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Etant donnée une fonction continue bornée f sur $[0,+\infty[$, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|f(\bar{X}_n)-f(x)| > \varepsilon\right) = 0.$$

(**on admettra que** l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x,y \geq 0,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon\ )$$

c) Montrer alors que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f(\bar{X}_n)\right)$ où $\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_n)\right)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $f\circ\bar{X}_n$.

8 a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_n)\right) = \int_0^{\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-nt/x}\, f(t)dt$$

b) En remarquant que la dérivée d'ordre (n-1) de $F = L(f)$ s'écrit

$$F^{(n-1)}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,(-t)^{n-1}\, f(t)dt$$

exprimer $\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_n)\right)$ à l'aide de $F^{(n-1)}$.

9 a) Quelle conclusion tirez-vous des questions 7 et 8 ?

b) Vérifier la validité de votre conclusion sur la fonction $f(t) = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ avec λ paramètre positif.

10 On désigne par f la solution du problème de condition initiale

$$\begin{cases} y''-7y'+6y = e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

sur $[0,+\infty[$.

a) Que vaut Lf ?

b) Déterminer f à partir de a) (on pourra décomposer F(p) en éléments simples).

c) Retrouver f sans recourir à la transformation L.

11 On désigne par (f,g) la solution du système différentiel

$$\begin{cases} f' = -f+2g \\ g' = -f-4g \end{cases}$$

qui satisfait à la condition initiale $f(0) = g(0) = 1$.

a) Montrer que $(F,G) = (Lf,Lg)$ satisfait à un système linéaire.

b) Calculer F et G.

c) En déduire f et g.